

Kytkentäkentät - Rekursio, Cantor-verkko

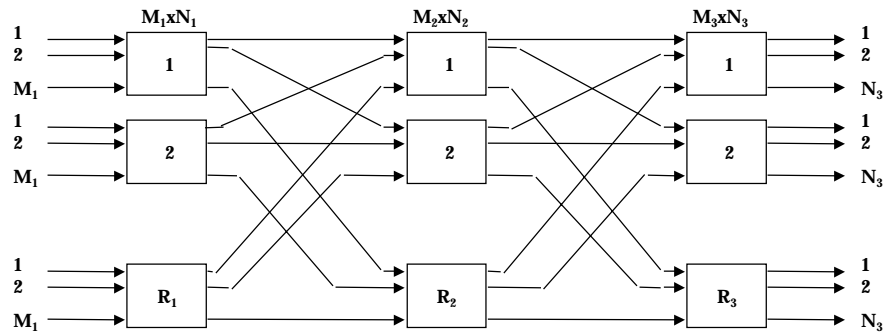
- ✓ **Kertaus**
- ✓ **Estottomuus**
 - § Uudelleen järjestely
 - § Tiukasti estoton
- ✓ **Yleinen kolmiportainen verkko**
- ✓ **Closin -verkko**
- ✓ **Benes -verkko**
- ✓ **Cantor -verkko**
- ✓ **Kytkentäpisteet ja kompleksisuus**

Kytkentäkentän ominaisarvoja

- ✓ **Kytkentäpisteiden lukumäärä on ristikytkentäpisteiden lukumäärä kentässä.**
- ✓ **Looginen syvyys on signaalin kulkutiellä olevien kytkinten lukumäärä.**
- ✓ **Esto määräytyy kentän rakenteesta.**
- ✓ **Kytkentäpisteen ajokyky määritellään ajettavien kytkentäpisteiden lukumäärällä.**

Kolmiportaisen kytkentäkentän yleinen esitystapa

- ✓ Kolmiportainen kytkentäkenttä, palautettuna puhtaaseen tilakytkentään, voidaan esittää tilakytkiminä, joista jokainen on kytketty seuraavaan portaan jokaiseen kytkimeen.

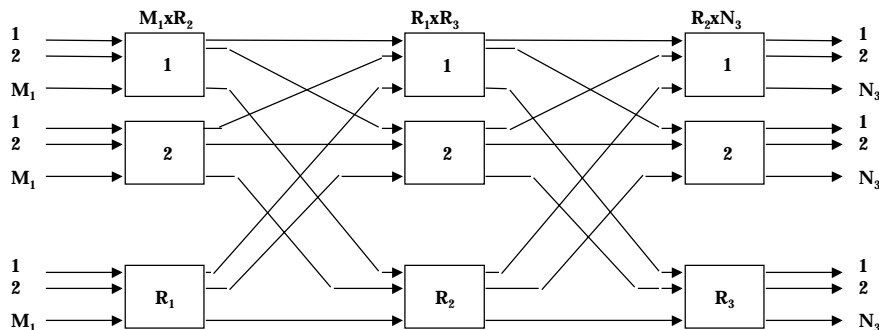


© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 3

Closin -verkko



§ porras 1: $N_1 = R_2$

§ porras 2: $M_2 = R_1$ ja $N_2 = R_3$

§ porras 3: $M_3 = R_2$

Esim. 8192 PCM, 16M = 8 x 2M perusnopeus:

$M_1 = N_3 = 1024,$

$R_1 = R_3 = 8 \cdot 32 = 256,$

$R_2 = 2048 \rightarrow$ tiukasti estoton

© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 4

Tiukasti estoton Closin -verkko

- ✓ Closin -verkko on tiukasti estoton, kun toisen portaan kytkinten lukumäärä on

$$R_2 \Rightarrow M_1 + N_3 - 1$$

- ✓ Erikoistapauksena symmetrinen kytkinkenttä, jossa $M_1 = N_3 = N$

$$R_2 \Rightarrow 2N - 1$$

Uudelleen järjesteltävä Clos -verkko

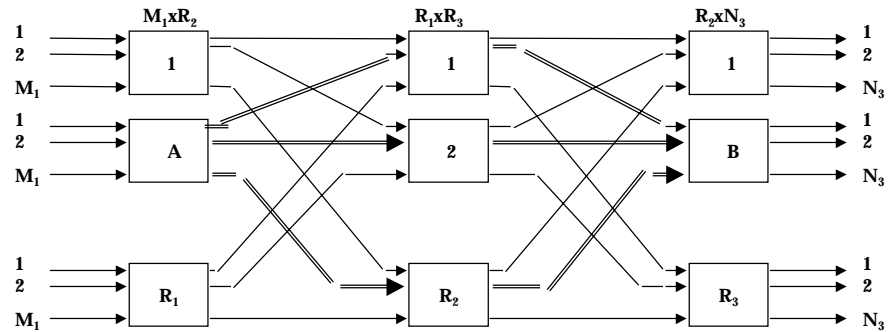
- ✓ Kolmiportainen Closin -verkko on uudelleen järjesteltävän estoton, kun

$$R_2 \Rightarrow \max(M_1, N_3)$$

- ✓ Erikoistapauksena symmetrinen kytkinkenttä, jossa $M_1 = N_3 = N$

$$R_2 \Rightarrow N$$

KytKentä kytKimestä A kytKimeen B

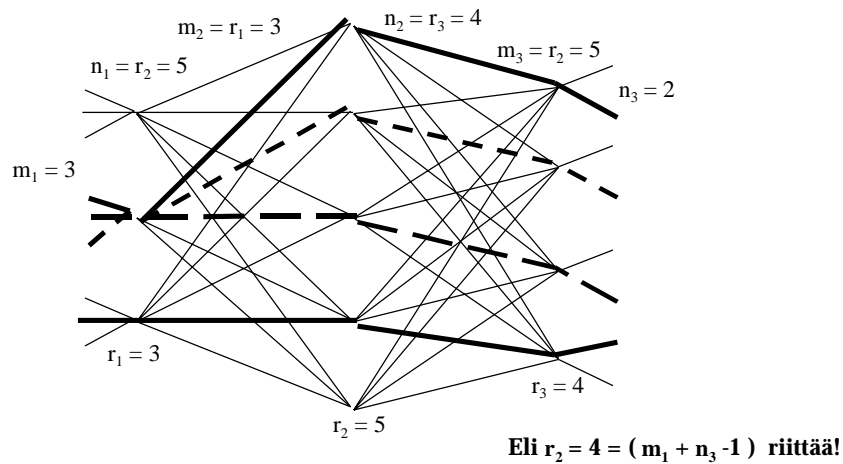


© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 7

Closin teoreeman välttämättömyyden visualisointi



© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 8

Kytkentäkenttien vaihtoehtoinen esitystapa

- ✓ Kytkentäkenttä voidaan esittää käsittelyn helpottamiseksi joko verkkona tai tasokuviona.
- ✓ Tasokuviossa säästytään yksittäisten yhteyksien piirtämiseltä.
- ✓ Verkkokuva on ymmärtämisen kannalta helpompi.

Kentän rekursiivinen rakentaminen

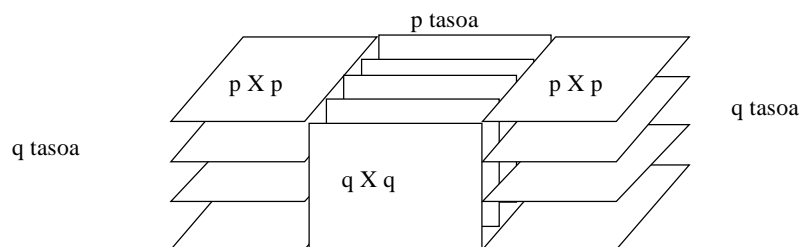
tulot

$$N = p \times q$$

Uudelleen järjestettävästi estoton

lähdöt

$$N = p \times q$$



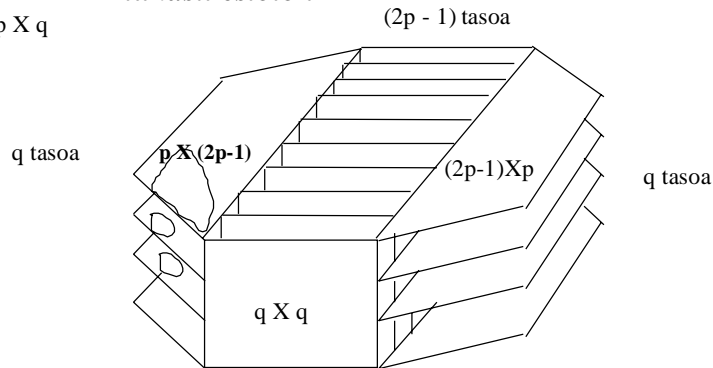
$$\text{Kytkentäpisteitä: } p^2q + q^2p + p^2q = 2qp^2 + q^2p$$

Kentän rekursiivinen rakentaminen -2

tulot
 $N = p \times q$

Tiukasti estoton

lähdöt
 $N = p \times q$



Kytkentäpisteitä: $p(2p-1)q + q^2(2p-1) + (2p-1)pq = 2p(2p-1)q + q^2(2p-1)$

Kytkentäkentän rekursiivinen muodostaminen

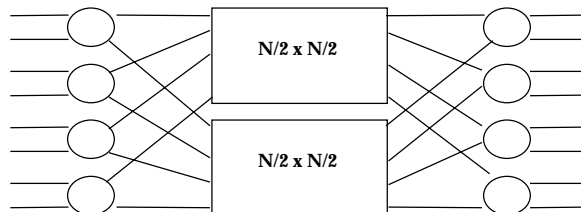
- ✓ **Rekursiivisessa muodostamisessa kytkentäkentän rakenne välittyy eri tasoille identtisenä.**
- ✓ **Tiukasti estottoman Closin-verkon yksittäiset kytkimet muodostetaan tiukasti estottomista Closin-verkoista, jne.**
- ✓ **Tiukasti estottomista kytkimistä voidaan saada aikaa uudelleen järjestettävästi estoton kenttä (CLOSin teoreema).**
- ✓ **Uudelleen järjestettävästi estottomista moduuleista voidaan rakentaa tiukasti estoton kenttä!**

Kytkentäkentän muodostamisen problematiikkaa

- ✓ Ihanteellinen ratkaisu:
 - § Vähän kytkentäpisteitä
 - § Pieni kompleksisuus
 - § Yksinkertainen muodostaa
- ✓ $N \times N$ -kytkentäkenttä, miten valita P ja Q ???
- ✓ Kytkentäkentän on laidoiltaan symmetrinen, joten oletuksena valitaan P mahdollisimman pieneksi (esim 2) --> $Q = N/P$.
- ✓ Toisaalta tiukasti estottoman kytkentäkentän ongelma on kentän keskiportaan koon nopea kasvaminen pienillä P :n arvoilla.

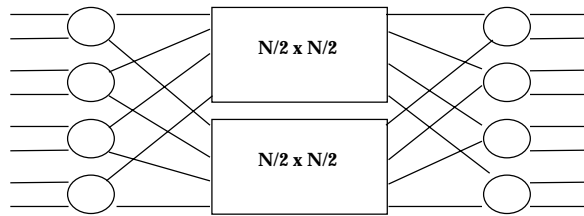
2x2-kytkinten tapaus

- ✓ Mikäli kentän koko on kahden potenssi ($N = 2^n$), voidaan kenttä muodostaa valitsemalla $P=2$ ja $Q=N/2$

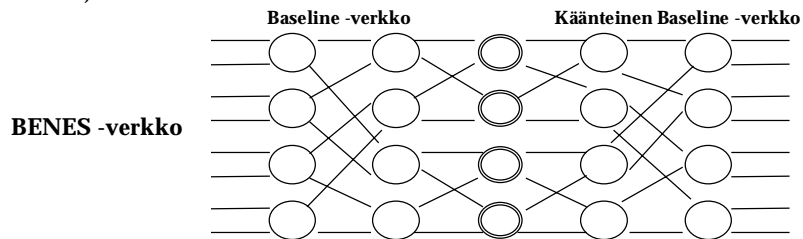


Esim N=8

1)



2)



Benes -verkko

- ✓ Benes -verkko on rekursiivisesti 2×2 -kytkimistä muodostettu uudelleen järjesteltävä verkko.
- ✓ 1-puoliverkko tunnetaan nimellä baseline -verkko
- ✓ 2-puoliverkko tunnetaan nimellä käänteinen baseline -verkko
- ✓ Benes -verkossa on $(2\log_2 N - 1)$ porrasta.
- ✓ Kytkentä pisteiden lukumäärä on

$$4(N/2)(2\log_2 N - 1) = 4N\log_2 N - 2N \sim 4N\log_2 N$$

Tiukasti estottoman kytkentäkentän muodostaminen rekursiolla

- ✓ Tiukasti estoton kytkentäkenttä voidaan muodostaa aivan vastaavasti mutta kentän koko kasvaa hyvin nopeasti.
- ✓ Esim. $N \times N$ -kenttä muodostettuna $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ -kytkimistä
- ✓ Valitaan $N = 2^n$ ja $n = 2^l$, jolloin kenttä rakentuu
 - § 1 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
 - § 2 portaassa $(2 \times 2^{n/2} - 1)$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
 - § 3 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä

Jatkoa edelliseen

- ✓ Matemaattisen tarkastelun helpottamiseksi valitaan kytkinten koot hieman toisin.
 - § 1 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2+1}$)-kytkimiä
 - § 2 portaassa $(2 \times 2^{n/2})$ kappaleesta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
 - § 3 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2+1} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä
 - § $(2^{n/2} \times 2^{n/2+1}) = 2(2^{n/2} \times 2^{n/2})$
 - § Yhteensä $6(2^{n/2})$ kappaletta ($2^{n/2} \times 2^{n/2}$)-kytkimiä

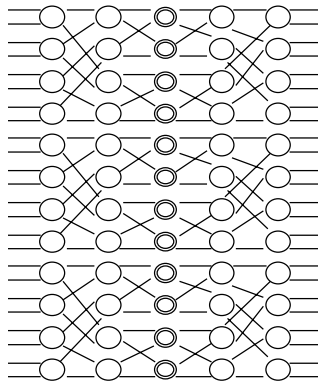
- ✓ Rekursiivinen palautuskaava

$$F(2^n) = 6(2^{n/2})F(2^{n/2}) = 6^l(2^{n/2+n/4+n/8+\dots+1})F(2^1) \\ \sim N(\log_2 N)^{2,58}F(2) = 4N(\log_2 N)^{2,58}$$

- ✓ Tiukasti estoton kenttä sisältää eksponentin verran enemmän kytkimiä kuin uudelleen järjesteltävä kenttä

Cantor -verkko on tapa muodostaa tiukasti estottomia kenttiä pienemmällä kytkentäpiste määrällä

- ✓ Peruspalikkana on BENES -verkko.



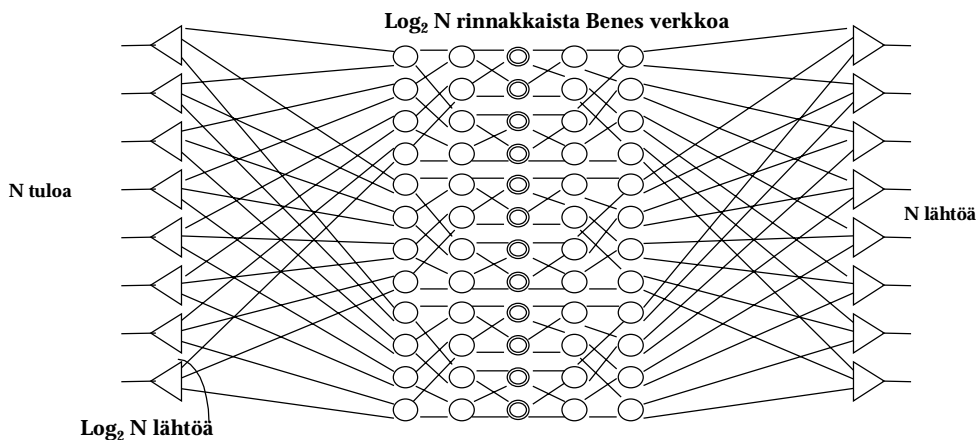
© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 19

Cantor -verkko

- ✓ Cantor -verkko on tapa muodostaa tiukasti estottomia kenttiä pienemmällä kytkentäpiste määrällä.



© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 20

Cantor verkon ominaisuuksia

- Kytkeänpisteiden lkm = $4 \times N \log_2 N \times \log_2 N = 4N(\log_2 N)^2$
jos kanavointilaitteita ei lasketa.

Cantor verkko on tiukasti estoton!

Todistus:

Merkataan rinnakkaisten Benes verkkojen määrää m ja Benes portaan numeroa k ja $A(k)$ - portaassa k yhdestä Cantor verkon tulosta ilman uudelleen järjestelyä saavutettavien Benes -kytkinten määrä.

$$A(1) = m.$$

$$A(2) = 2A(1) - 1.$$

$$A(3) = 2A(2) - 2.$$

$$A(k) = 2A(k-1) - 2^{k-2} = 2^2 A(k-2) - 2 \times 2^{k-2} = 2^{k-1} A(1) - (k-1) 2^{k-2}$$

$$A(\log N) = 2^{\log N - 1} m - (\log N - 1) 2^{\log N - 2}$$

$$= \frac{1}{2} N m - \frac{1}{4} (\log N - 1) N$$

Cantor todistus jatkuu

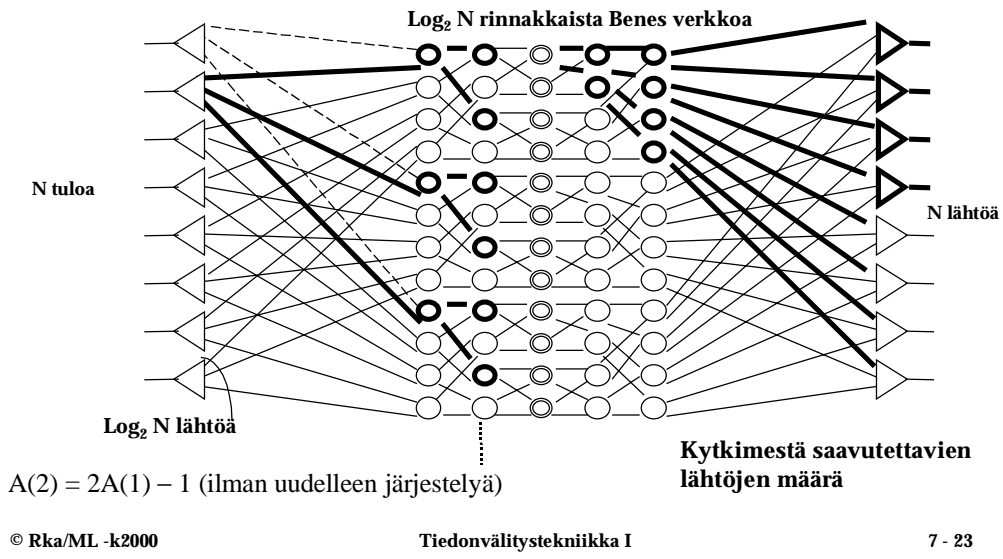
$$2 \times \left(\frac{1}{2} N m - \frac{1}{4} (\log N - 1) N \right) > \frac{N m}{2}$$

$$\Rightarrow m > \log N - 1.$$

Eli jos rinnakkaisia Benes verkkoja on $\log N$ kappaletta, Cantor verkko on tiukasti estoton. \square

Ts. *Tiukasti estoton* Cantor verkko muodostuu laittamalla rinnan $\log N$ kappaletta *uudelleen järjestettävästi estottomia* Benes verkkoja.

Cantor-verkossa saavutettavien kytkinten määrä



Numeerinen esimerkki Cantor verkosta

$$N = 32 \times 2048 = 2^{16} \approx 64\,000$$

$$m = \log N = 16$$

Demultiplekseissa lähtöjä = 16 kappaletta

Multipleksereissa tuloja = 16 kappaletta

Muxeja = 64 000 kappaletta

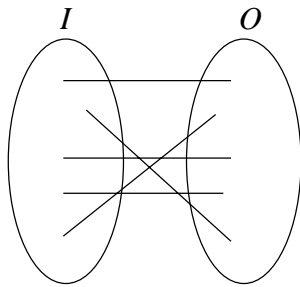
Demuxeja = 64 000 kappaletta

Benes verkkoja = 16 kappaletta

Benes verkoissa portaita = $2\log N - 1 = 2 \times 16 - 1 = 31$ kappaletta

Benes verkoissa kytkimiä = $N \log_2 N = 2^{16} * 32 \approx 2M$.
kussakin

Kytcentöjen kokonaismäärä kentässä

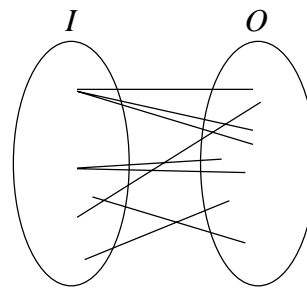


Yksi yhteen

$$C = \{(i, o) \mid i \in I, o \in O\}$$

$$(i, o) \in C \text{ ja } (i, o') \in C \Rightarrow o = o'$$

$$(i, o) \in C \text{ ja } (i', o) \in C \Rightarrow i = i'$$



Yksi moneen

$$C = \{(i, n_i) \mid i \in I, n_i \subset O\}$$

C - Kytcentöjen kuvaus

© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 25

Kytcentäkentän kompleksisuus

- ✓ Kytcentäkentän kompleksisuus on likimain sama kuin kytcentäpisteiden lukumäärä.
- ✓ G on kytcentäkentän erilaisten, sallittujen kytcentöjen $C\{i, o\}$ kuvaus.
- ✓ $\zeta(G)$ on $\log_2(G)$ eli logaritmi erilaisten, sallittujen kytcentöjen määrästä. (\sim kytcentäpisteiden lukumäärä)
- ✓ $\zeta(G)$ käytetään kytcentäkentän kompleksisuuden aproksimoinnissa, sillä $N \times N$ -ristikytcentämatriisi sisältää suurimman määrän kytcentäpisteitä vastaavan kokoisista kytcentäkentistä.

§ Mikäli ristikytcentämatriisissa on R-kytcentäpistettä, on siinä maksimissaan 2^R erillistä tilaa (jokaisen kytcentäpisteen auki/kiinni -tila), minkä takia $\zeta \leq R$ (osa ratkaisuisista ei ole sallittuja).

© Rka/ML -k2000

Tiedonvälitystekniikka I

7 - 26

Kompleksisuuden alaraja

✓ Oletetaan että kytkentäkenttä on $N \times N$ ja sen rakenne on täysiulotteinen.

✓ $C = N!$

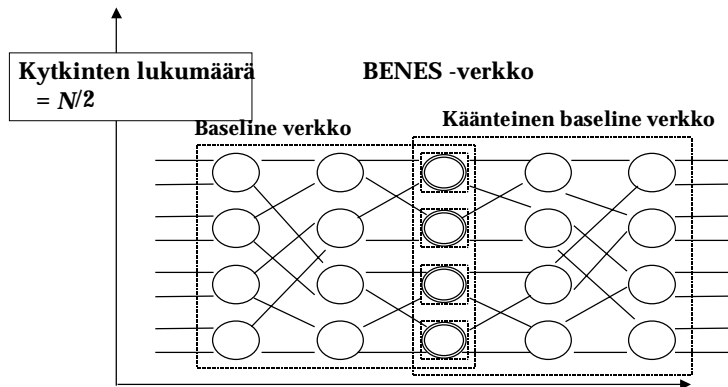
✓ $\zeta = \log_2(N!) \sim N \log_2(N) - 1,44N + \frac{1}{2} \log_2(N)$

✓ Benes -verkkolle on

$$\zeta \sim (N/2)(2 \log_2 N - 1) = N \log_2(N) - \frac{1}{2}N$$

eli likimain minimimäärä kytkimiä.

Benes -verkon kasvu



Porrasten lukumäärä = $2 \log_2 N - 1$

Kytkentäpisteiden lukumäärä on porrasten lukumäärä \times kytkinten lkm portaassa =

$$4 \times N/2 \times (2 \log_2 N - 1) \approx 4N \log_2 N$$