Kytkentäfunktioiden monimutkaisuuden alaraja,
Copy-funktio,
Itsereitittävyys

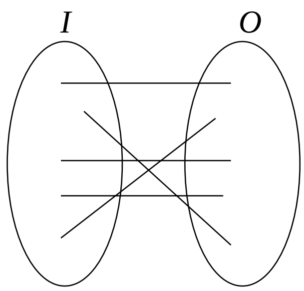
Luentoaikataulu

17.2.99 Kytkentäkenttien monimutkaisuus , itsereitittävyys

21.2.99 Kytkentäkenttien teknologia

28.2.99 Vikasietoisuus ja luotettavuus //talviloma?

Kytkentöjen kokonaismäärä kentässä

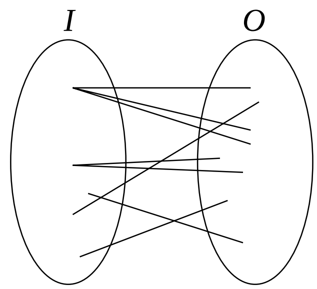


Yksi yhteen

$C = \{(i,o) |\ i \in I,\ o \in O\}$

$(i,o) \in C$ ja $(i,o') \in C \Rightarrow o = o'$

$(i,o) \in C$ ja $(i',o) \in C \Rightarrow i = i'$



Yksi moneen

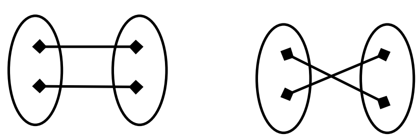
$C = \{(i,n_i) |\ i \in I,\ n_i \subset O\}$

I - tulojen joukko, O - lähtöjen joukko

C **-** Kytkentöjen kuvaus

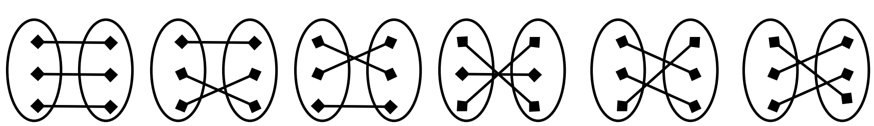
Yksipistekytkentöjen määrä on N!
Visualisoidaan joukkoja C

N = 2



2! = 2

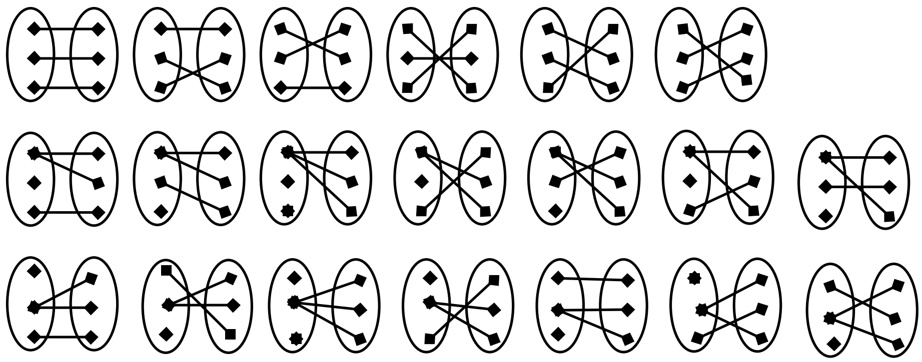
N = 3
3! = 6



C:n muodostus: Numeroidaan tulot, laitetaan numerot mielivaltaiseen järjestykseen.

Monipistekytkentöjen vaikutus?

Joukko C, kun N = 3



jne…

Joukossa C jokainen lähtö voi valita tulonsa --> C:ssä on N^N elementtiä
Joukko C on merkittävästi laajempi kuin edellä!

Kentän kombinatorinen monimutkaisuus

ζ(G) - Graafin G toteuttamien legitiimien erilaisten kytkentäkonfiguraatioiden *C* lukumäärän kaksikantainen logaritmi.

R **- kentän kytkinten lukumäärä.**

2^R - kentän, jossa on *R* kytkintä, tilojen määrä.

Karkea yläraja:

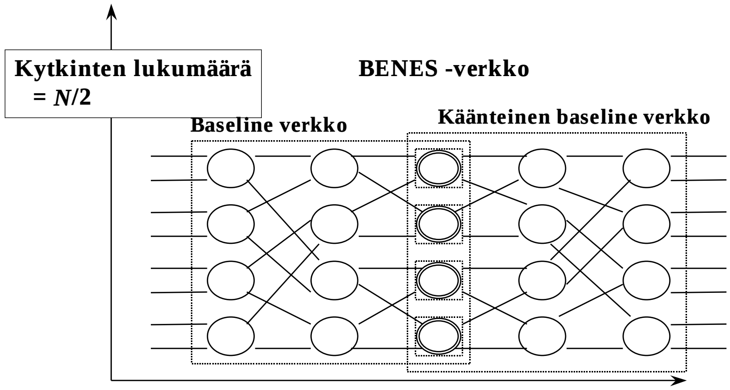
$\zeta \leq R$

Tarkempia ylärajoja saadaan:

- poistetaan ei legitiimit tilat esim. joissa kaksi kytkintä on liittynyt samaan lähtöön

- joissa kaksi kentän tilaa tuottaa saman *C*.

Benes -verkon kasvu



Porrasten lukumäärä = $2 \log_2 N - 1$

Kytkentäpisteiden lukumäärä on porrasten lukumäärä $\times$ kytkinten lkm portaassa =

$4 \times N/2 \times (2 \log_2 N - 1) \approx 4N \log_2 N$

Kompleksisuuden alaraja lasketaan kentän funktion avulla

- **Oletetaan että kytkentäkenttä on NxN ja sen rakenne on täysiulotteinen.**
- **Lukumäärä(C) = N!**
- **$\zeta = \log_2 (N!) \sim N\log_2(N) - 1{,}44N + ½\log_2(N)$**

- **Benes -verkon 2x2 kytkinten määrä on**

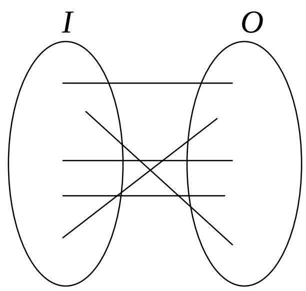
  $(N/2)(2\log_2 N-1) = N\log_2(N) - ½N \sim \zeta$

  eli likimain minimimäärä kytkimiä N! tilan toteuttamiseksi.

Kytkentäfunktiot luonnehtivat kentän tavoitetta

C - Kytkentöjen kuvaus

Pt-to-pt kytkentäfunktio



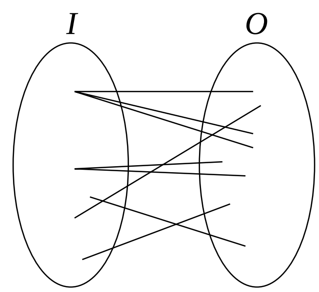
Yksi yhteen

$C = \{(i,o) | \ i \in I, o \in O\}$

$(i,o) \in C$ ja $(i,o') \in C \Rightarrow o = o'$

$(i,o) \in C$ ja $(i',o) \in C \Rightarrow i = i'$

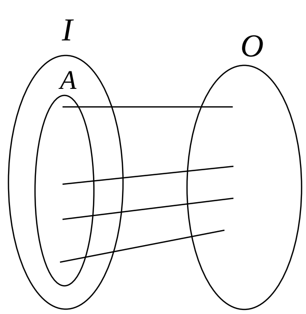
Multicastfunktio



Yksi moneen

Tavoite: Selvittää kytkentöjen kokonaismääräkentässä ja kentän vähimmäismonimutkaisuus.

Keskitinfunktio

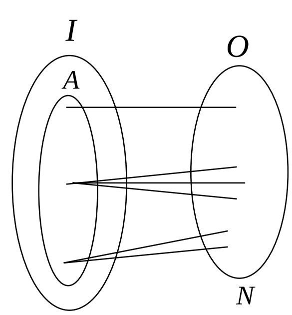


$C = \{(i,o) | \ i \in A \subset I, o \in O\}$

$(i,o) \in C$ ja $(i,o') \in C \Rightarrow o = o'$

$(i,o) \in C$ ja $(i',o) \in C \Rightarrow i = i'$

Copy-funktio



$C = \{(i,n_i) | \ i \in I, \Sigma n_i = N\}$

Lähtöjen n_i järjestyksellä ja identiteetillä ei väliä (output unspecific).
Huom: Copy-funktio =/= multicast!!!

Voidaan tarkastella eri funktioiden toteuttamien kytkentäkonfiguraatioiden C määrää ζ

$\zeta_{\text{pt-pt-kytkinfunktio}}$

$\zeta_{\text{multicastfunktio}}$

$\zeta_{\text{keskitinfunktio}}$

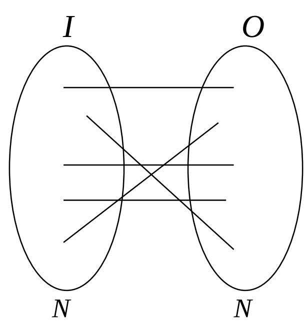
Määritelmän mukaan sanomme, että graafi G on uudelleen järjestettävästi estoton, jos se toteuttaa kaikki kytkentäkonfiguraatiot *C*.

Siis $\zeta_f \le \zeta(G)$

Siis tarkastelemalla eri funktioiden kytkentäkonfiguraatioiden lukumäärää saamme selville uudelleen järjestettävän kentän monimutkaisuuden alarajan.

Pt-pt-kytkentäfunktion monimutkaisuuden alaraja

Pt-pt-kytkentäfunktio



Yksi yhteen

Kaikki *i* kytketty tasan yhteen *o*.

Haluamme siis toteuttaa $N!$ erilaista *C*.

Käytetään Sterlingin likiarvoa:

$N! \approx \sqrt{2\pi}\, N^{N+1/2} e^{-N}$

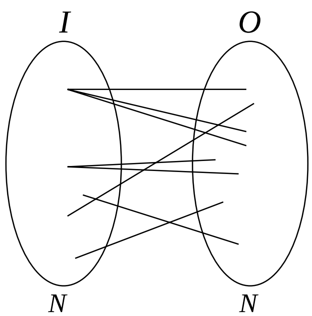
$= \sqrt{2\pi}\ \exp_2(N \log_2 N - N \log_2 e + 1/2 \log_2 N)$

$\zeta_{\text{pt-pt}} = \log_2 N! \approx N \log_2 N - 1.44N + 1/2 \log_2 N$

HUOM: Benes verkon kytkinten määrä oli $N \log_2 N - N/2$, joka on hyvin lähellä alarajaa $\zeta_{\text{pt-pt}}$.

Multicastfunktion monimutkaisuuden alaraja

Multicastfunktio



$C = \{(o, i) | \, i \in I, o \in O\}$

Jokainen $o \in O$ on kytketty johonkin $i \in I$.

Jokainen *o* voi siis valita minkä tahansa *i*.

Siis me haluamme toteuttaa

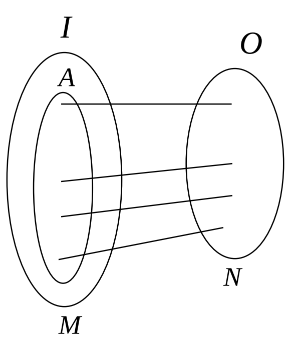
$N^N = \exp_2(N \log_2 N)$ kytkentäkonfiguraatiota *C*.

$\boldsymbol{\zeta_{\text{mtcast}} - \zeta_{\text{pt-pt}} \approx 1.44\, N}$

Kenttää, joka toteuttaisi multicastin ja olisi monimutkaisuudeltaan alarajan tuntumassa ei tunneta. Tiedetään, että Benes verkko toteuttaa multicastin, jos kytkinten määrä kaksinkertaistetaan p-to-pt kytkentäkenttään verrattuna.

Keskitinfunktion monimutkaisuuden alaraja

Keskitinfunktio



$C = \{i | \, i \in A, i \text{ lukumäärä} = N \, (< M)\}$

Joukkoja *C* on $\binom{M}{N}$ kappaletta

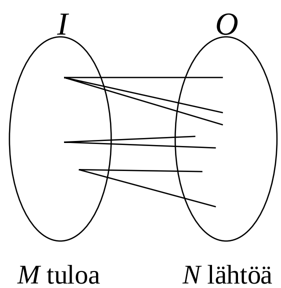
$$\zeta_{\text{keskitin}} = \log_2 \frac{M!}{N! \; (M-N)!}$$

$$\zeta_{\text{keskitin}} = M\, H(c) \qquad c = N/M$$

$$H(\mathrm{c}) = -\mathrm{c} \log_2 \mathrm{c} - (1-\mathrm{c}) \log_2 (1-\mathrm{c})$$

Eli keskittemen teoreettinen monimutkaisuus on verrannollinen tulojen määrään. Käytännön ratkaisuja ei kuitenkaan tunneta ja tarvitaan tiukasti estottomia keskittimiä => käytetään M logM kenttiä.

Kuvausten lukumäärä Copy-kentässä

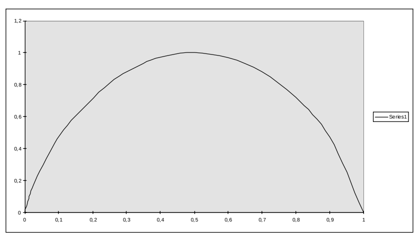


$C = \{(i,n_i) \mid i \in I, \Sigma n_i = N\}$

Erilaisten C lukumäärä on

$$\binom{M-1+N}{M-1}$$

Kuinka monella tavalla N oliota voidaan laittaa M koriin.



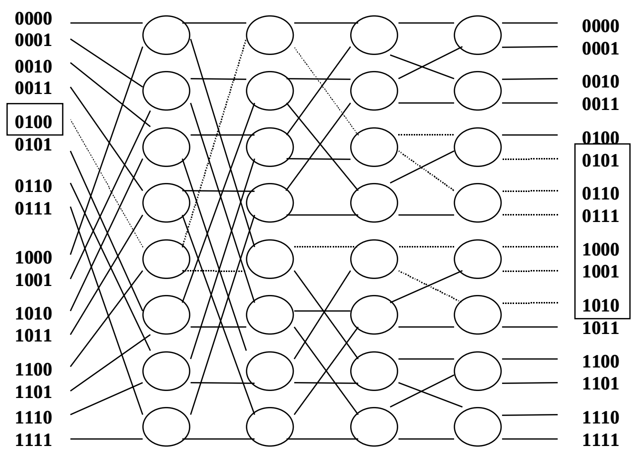
$$\zeta \geq (M-1+N)\, H\left(\frac{M-1}{M-1+N}\right)$$

$H(c) = -c \log_2 c - (1-c)\log_2(1-c)$

Kopioiden muodostus binääriverkolla

- ✔ **Kopiointi toteutetaan verkkoa edeltävällä levityspuulla, jonka jälkeen on 'järjestelijä'.**
- ✔ **Kopioinnissa tarvitaan tieto tulojohdosta ja kopioiden lukumäärästä.**
- ✔ **Kopioinnissa verrataan kopiovälin binääriarvoja ja suoritetaan kopiointi- / reitityspäätös arvojen perusteella.**

Banyan-pohjainen levityspuu



Multicast kentän voi rakentaa rekursiivisesti esim. Copykenttä + pt-to-pt kenttä

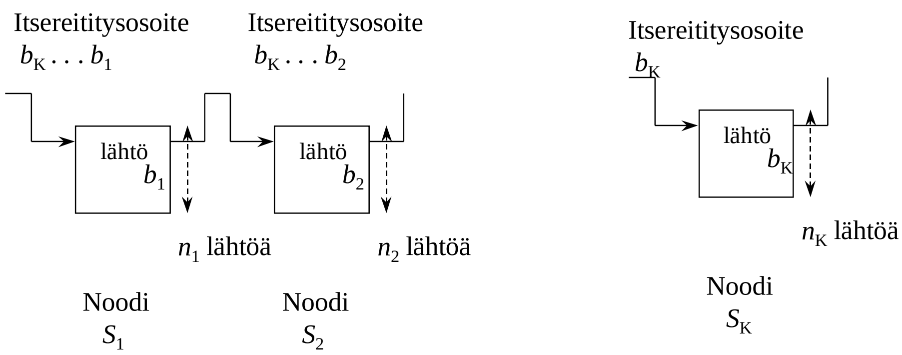
✓ Tämä johtaa kuitenkin portaiden lukumäärän kasvuun, mikä voi olla epätoivottavaa.

✓ Moniportaisille kentille on ominaista polun haun/kontrollin monimutkaisuus.

✓ Tätä ongelmaa yritetään ratkaista mm. itsereitittävyydellä.

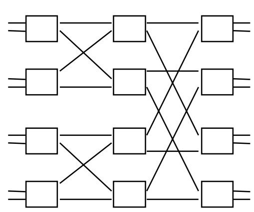
Itsereitittävyys perustuu osoitteeseen, joka kertoo polun kentän läpi

Itsereitittävyys on pakettikytkentäkentän mahdollinen ominaisuus. Paketilla on otsikko, jota käytetään polun löytämiseksi kentän läpi. Polkuja tulolta lähdölle on yksi (tai useampi).

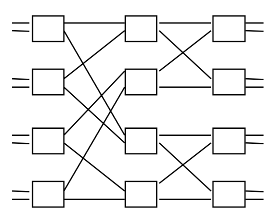


Yhden polun perusverkot ovat Baseline verkon muunnelmia

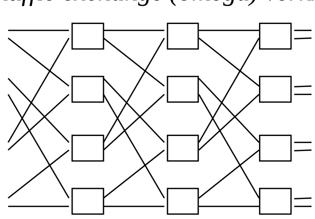
Banyan verkko



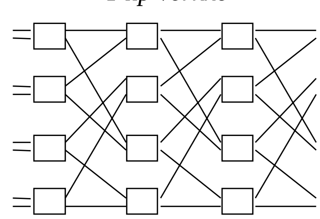
Baseline verkko



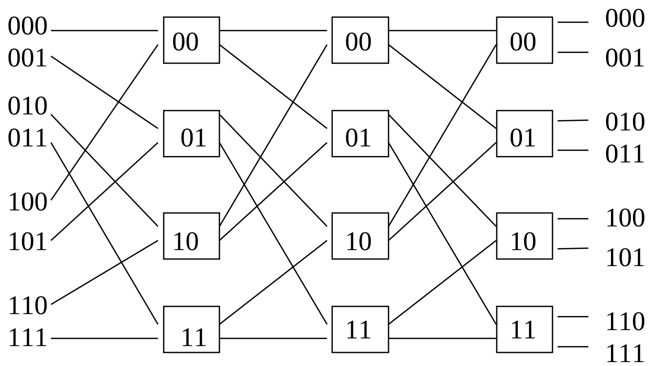
Shuffle exchange (omega) verkko



Flip verkko

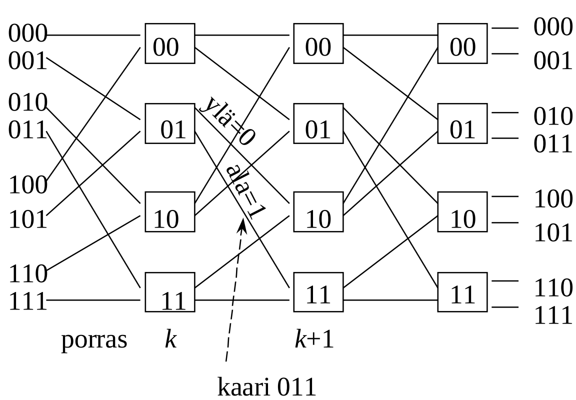


Itse-reitittävä shuffleverkko numeroidaan säännöllisesti



$N = 2^n$ tuloa ja 2^n lähtöä. Benesrakenne => Portaita on n kpl ja kytkimiä $N/2 = 2^{n-1}$ kussakin portaassa.
Portaan kytkimet numeroidaan ylhäältä alas $0 \ldots 2^{n-1} - 1$. Portaiden numerointiin tarvitaan n - 1 bittiä.
Portaita yhdistävät kaaret numeroidaan ylhäältä alas n bitillä.

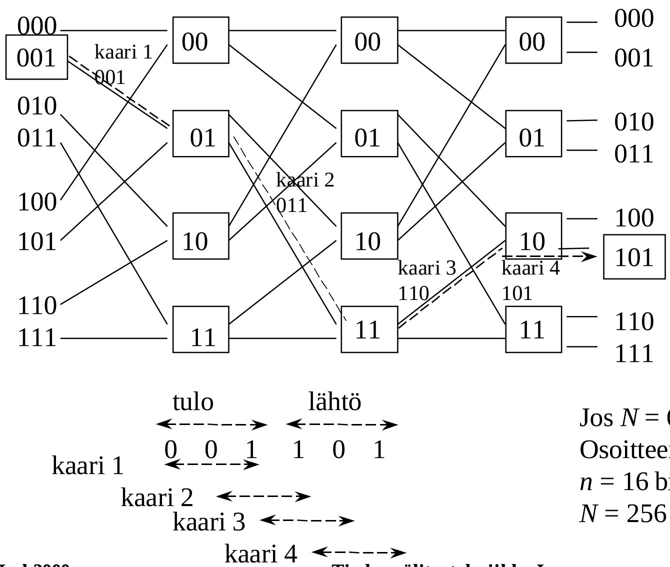
Itse-reitittävässä shuffleverkossa lähdön numero toimii reititysosoitteena



Portaan k solmun nro = kaaren nro - oikean puoleisin bitti

Portaan k +1 solmun nro = kaaren nro - vasemman puoleisin bitti

Itse-reititys esimerkki



Jos N = 64 000
Osoitteen pituus on
n = 16 bittiä.
N = 256 , Osoite = 8 bittiä.

Ratkaisun rajoitukset

✓**Banyan verkko on estollinen**.

✓Se toteuttaa $\exp_2(1/2N \log_2 N) = (N^N)^{1/2}$ kytkentäkonfiguraatiota.

✓Tämä on vähemmän kuin vaadittu N! ≈ $\exp_2(N \log_2 N)$.

=>

✓Noodien välisten kaarien määrää voidaan nostaa, tai

✓Shufflea voidaan monistaa Cantor verkon tapaan, tai

✓Kaksi shufflea voidaan laittaa peräkkäin (vrt BENES verkko).

✓Myös puskurointia väliportaissa voidaan käyttää.

✓ Yksinkertaiset matriisiverkot aina kun mahdollista.