Kytkentäkentät - Rekursio, Cantor-verkko

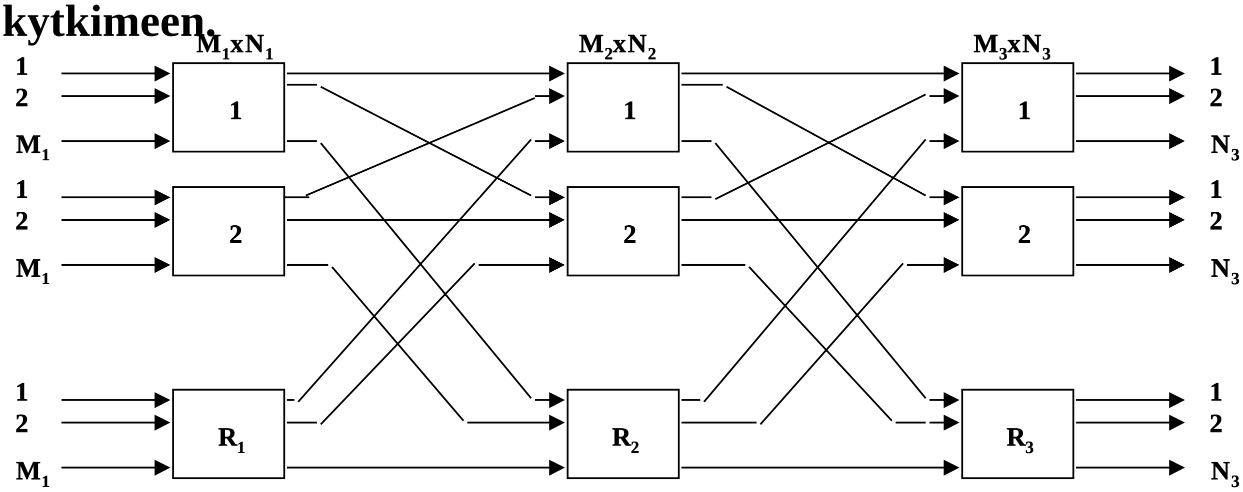
- ✔ **Kertaus**
- ✔ **Estottomuus**
  - § **Uudelleen järjestely**
  - § **Tiukasti estoton**
- ✔ **Yleinen kolmiportainen verkko**
- ✔ **Closin -verkko**
- ✔ **Benes -verkko**
- ✔ **Cantor -verkko**
- ✔ **Kytkentäpisteet ja kompleksisuus**

Kytkentäkentän ominaisarvoja

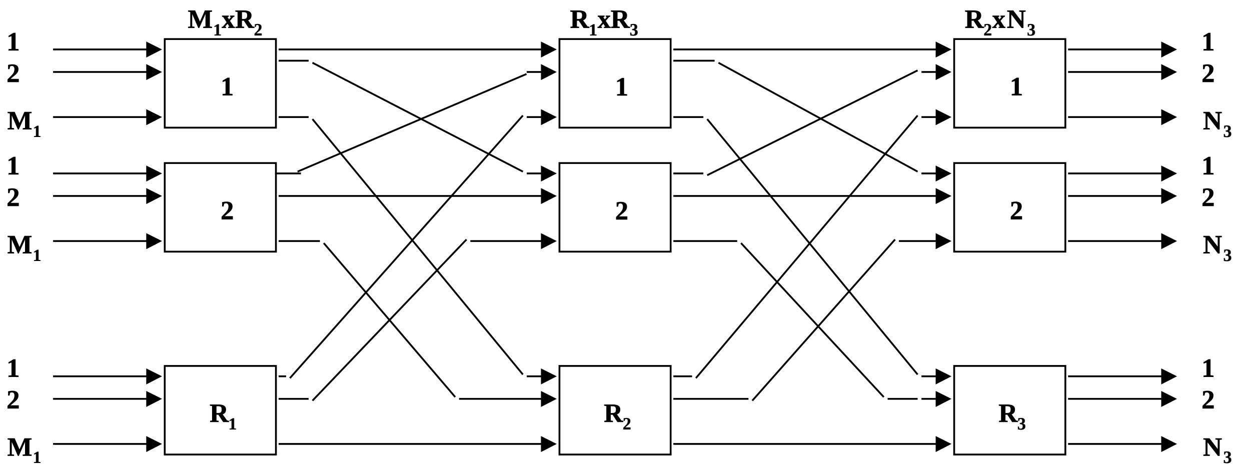
- ✔ **Kytkentäpisteiden lukumäärä on ristikytkentäpisteiden lukumäärä kentässä.**
- ✔ **Looginen syvyys on signaalin kulkutiellä olevien kytkinten lukumäärä.**
- ✔ **Esto määräytyy kentän rakenteesta.**
- ✔ **Kytkentäpisteen ajokyky määritellään ajettavien kytkentäpisteiden lukumäärällä.**

Kolmiportaisen kytkentäkentän yleinen esitystapa

✔ Kolmiportainen kytkentäkenttä, palautettuna puhtaaseen tilakytkentään, voidaan esittää tilakytkiminä, joista jokainen on kytketty seuraavan portaan jokaiseen kytkimeen.



Closin -verkko



§ porras 1: $N_1 = R_2$

§ porras 2: $M_2 = R_1$ ja $N_2 = R_3$

§ porras 3: $M_3 = R_2$

Esim. 8192 PCM, 16M perusnopeus:
$M_1 = N_3 = 1024$,
$R_1 = R_3 = 8*32 = 256$,
$R_2 = 2048$ ---> tiukasti estoton

Tiukasti estoton Closin -verkko

- ✔ **Closin -verkko on tiukasti estoton, kun toisen portaan kytkinten lukumäärä on**

$$R_2 => M_1 + N_3 - 1$$

- ✔ **Erikoistapauksena symmetrinen kytkinkenttä, jossa M_1 = N_3 = N**

$$R_2 => 2N - 1$$

Uudelleen järjesteltävä Clos -verkko

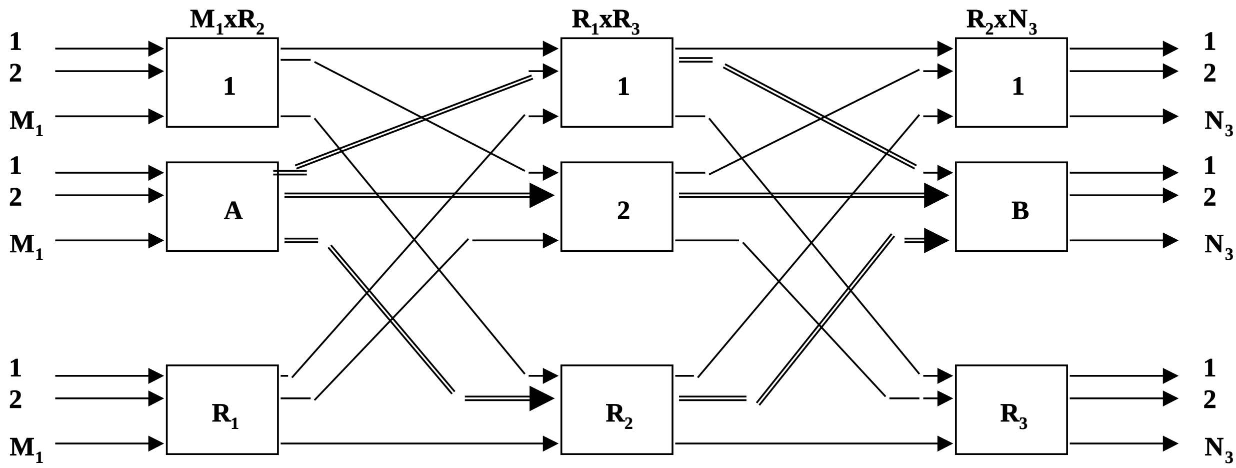
- ✔ **Kolmiportainen Closin -verkko on uudelleen järjeteltävän estoton, kun**

$$R_2 => \max(M_1 , N_3)$$

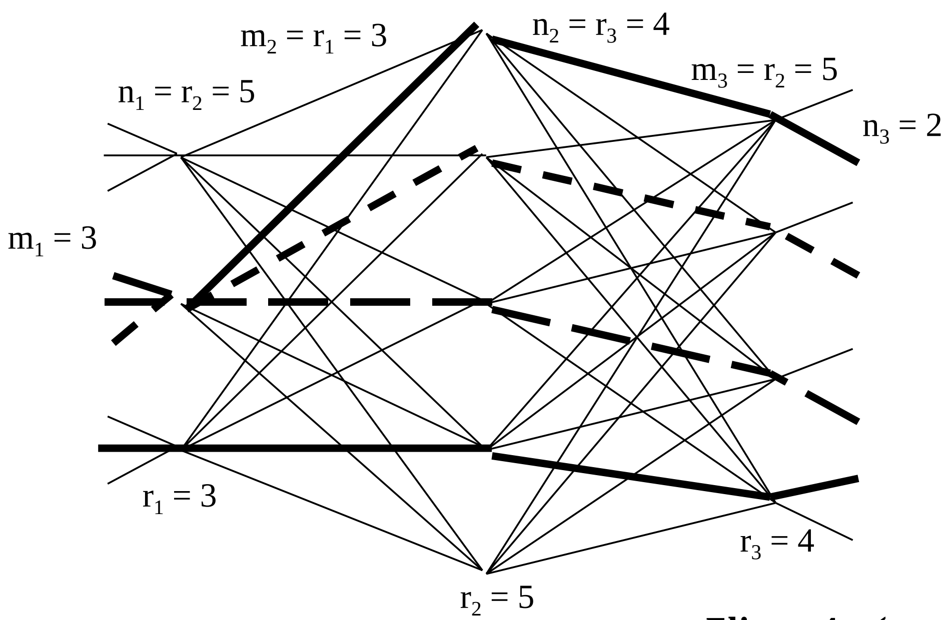
- ✔ **Erikoistapauksena symmetrinen kytkinkenttä, jossa M_1 = N_3 = N**

$$R_2 => N$$

Kytkentä kytkimestä A kytkimeen B



Closin teoreeman välttämättömyyden visualisointi



Eli $r_2 = 4 = (m_1 + n_3 -1)$ riittää!

Kytkentäkenttien vaihtoehtoinen esitystapa

- ✔ **Kytkentäkenttä voidaan esittää käsittelyn helpoittamiseksi joko verkkona tai tasokuviona.**
- ✔ **Tasokuviossa säästytään yksittäisten yhteyksien piirtämiseltä.**
- ✔ **Verkkokuva on ymmärtämisen kannalta helpompi.**

Kentän rekursiivinen rakentaminen

tulot

N = p X q

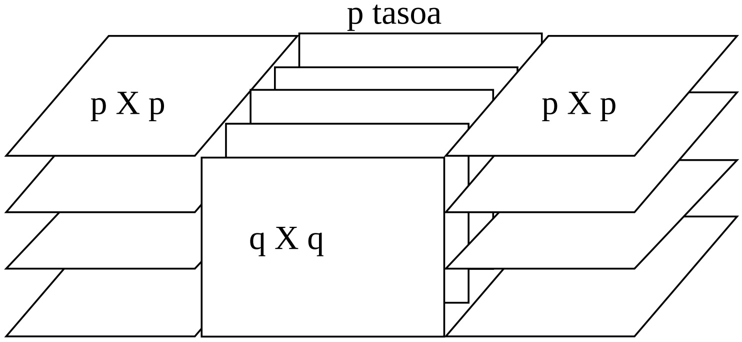
Uudelleen järjestettävästi estoton

lähdöt

N = p X q

p tasoa

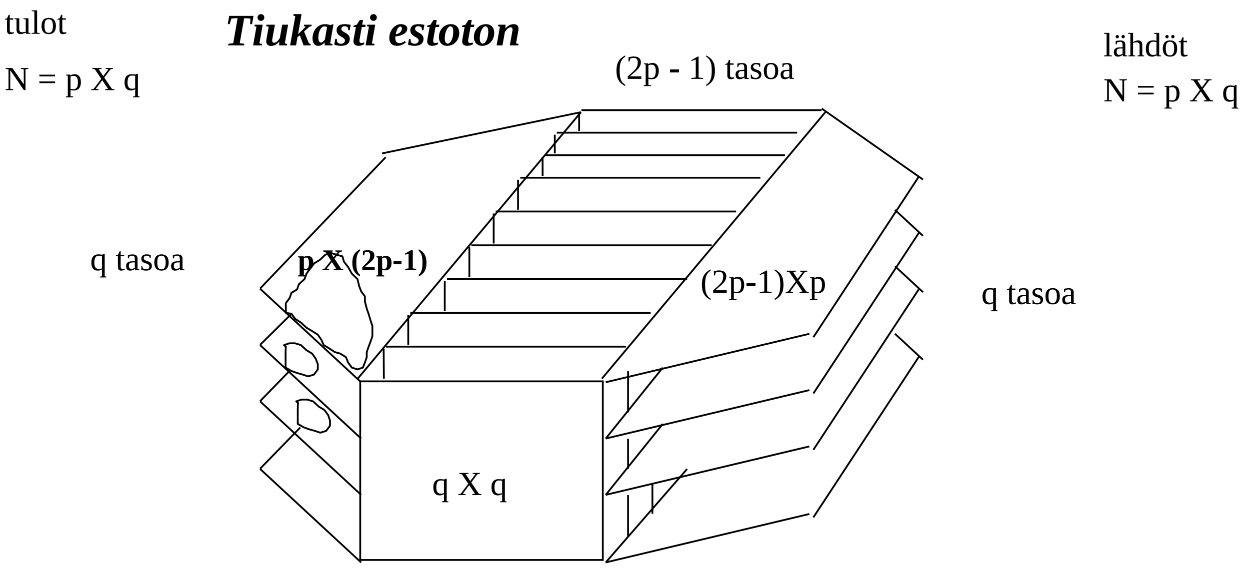
q tasoa



q tasoa

Kytkentäpisteitä: $p^2q + q^2p + p^2q = 2\,qp^2 + q^2p$

Kentän rekursiivinen rakentaminen -2



Kytkentäpisteitä: $p(2p-1)q + q^2(2p-1) + (2p-1)pq \;=\; 2p(2p-1)q + q^2(2p-1)$

Kytkentäkentän rekursiivinen muodostaminen

✔ **Rekursiivisessa muodostamisessa kytkentäkentän rakenne välittyy eri tasoille identtisenä.**

✔ **Tiukasti estottoman Closin-verkon yksittäiset kytkimet muodostetaan tiukasti estottomista Closin-verkoista, jne.**

✔ **Tiukasti estottomista kytkimistä voidaan saada aikaa uudelleen järjestettävästi estoton kenttä (CLOSin teoreema).**

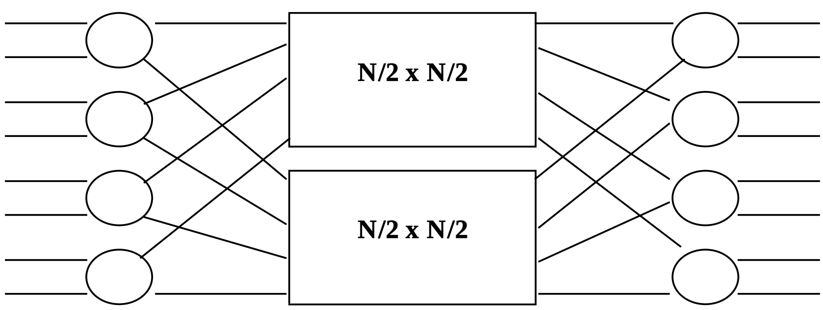
✔ **Uudelleen järjestettävästi estottomista moduuleista voidaan rakentaa tiukasti estoton kenttä!**

Kytkentäkentän muodostamisen problematiikkaa

- **Ihanteellinen ratkaisu:**
  - **Vähän kytkentäpisteitä**
  - **Pieni kompleksisuus**
  - **Yksinkertainen muodostaa**
- **NxN -kytkentäkenttä, miten valita P ja Q ???**
- **Kytkentäkentän on laidoiltaan symmetrinen, joten oletuksena valitaan P mahdollisimman pieneksi (esim 2) --> Q = N/P.**
- **Toisaalta tiukasti estottoman kytkentäkentän ongelma on kentän keskiportaan koon nopea kasvaminen pienillä P:n arvoilla.**

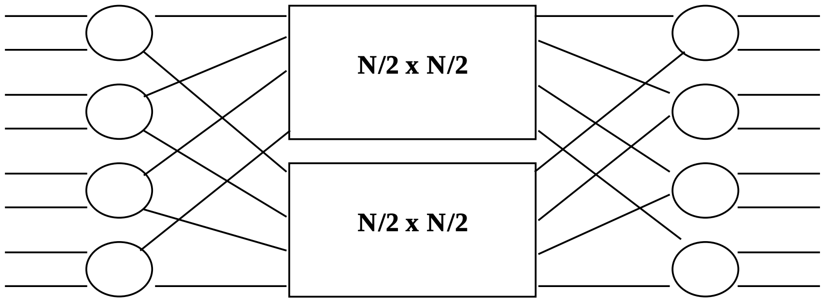
2x2-kytkinten tapaus

- **Mikäli kentän koko on kahden potenssi (N = 2^n), voidaan kenttä muodostaa valitsemalla P=2 ja Q=N/2**



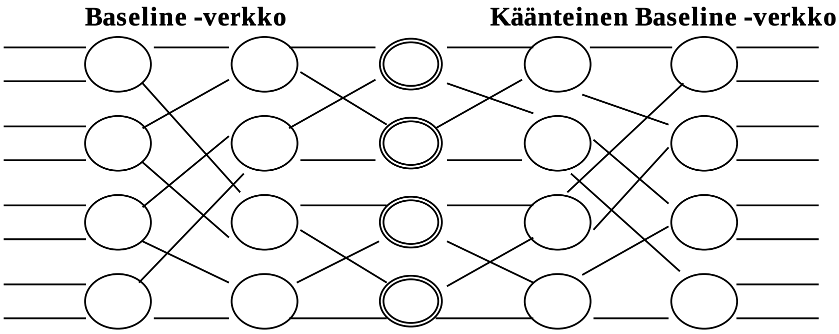
Esim N=8

1)



2)

BENES -verkko



Benes -verkko

- ✔ Benes -verkko on rekursiivisesti 2x2 -kytkimistä muodostettu uudelleen järjesteltävä verkko.
- ✔ 1-puoliverkko tunnetaan nimellä baseline -verkko
- ✔ 2-puoliverkko tunnetaan nimellä käänteinen baseline -verkko
- ✔ Benes -verkossa on ($2\log_2 N-1$) porrasta.
- ✔ Kytkentä pisteiden lukumäärä on

$$4(N/2)(2\log_2 N-1) = 4N\log_2 N-2N \sim 4N\log_2 N$$

Tiukasti estottoman kytkentäkentän muodostaminen rekursiolla

- ✔ **Tiukasti estoton kytkentäkenttä voidaan muodostaa aivan vastaavasti mutta kentän koko kasvaa hyvin nopeasti.**
- ✔ **Esim. NxN -kenttä muodostettuna $\sqrt{N} x \sqrt{N}$ -kytkimistä**
- ✔ **Valitaan $N = 2^n$ ja $n = 2^l$, jolloin kenttä rakentuu**
  - § **1 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2}$ x $2^{n/2}$)-kytkimiä**
  - § **2 portaassa ($2x2^{n/2}$ -1) kappaleesta ($2^{n/2}$ x $2^{n/2}$)-kytkimiä**
  - § **3 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2}$ x $2^{n/2}$)-kytkimiä**

Jatkoa edelliseen

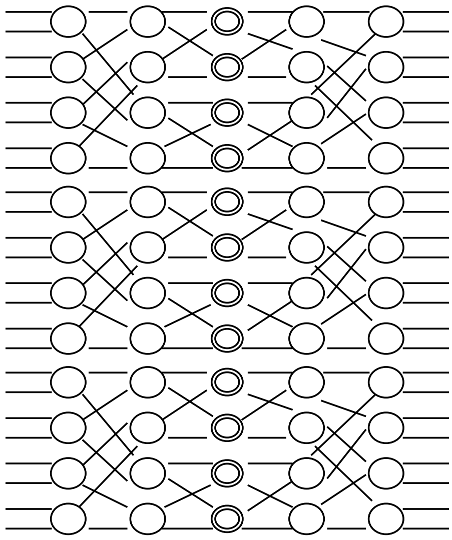
- ✔ **Matemaattisen tarkastelun helpottamiseksi valitaan kytkinten koot hieman toisin.**
  - § **1 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2}$ x $2^{n/2+1}$)-kytkimiä**
  - § **2 portaassa ($2x2^{n/2}$) kappaleesta ($2^{n/2}$ x $2^{n/2}$)-kytkimiä**
  - § **3 portaassa $2^{n/2}$ kappaleesta ($2^{n/2+1}$ x $2^{n/2}$)-kytkimiä**
  - § **($2^{n/2}$ x $2^{n/2+1}$) = 2($2^{n/2}$ x $2^{n/2}$)**
  - § **Yhteensä $6(2^{n/2})$ kappaletta ($2^{n/2}$ x $2^{n/2}$) -kytkimiä**
- ✔ **Rekursiivinen palautuskaava**

$$F(2^n) = 6(2^{n/2})F(2^{n/2}) = 6^l(2^{n/2+n/4+n/8+\ldots+1})F(2^1)$$
$$\sim N(\log_2 N)^{2,58}F(2) = 4N(\log_2 N)^{2,58}$$

- ✔ **Tiukasti estoton kenttä sisältää eksponentin verran enemmän kytkimiä kuin uudelleen järjestettävä kenttä**

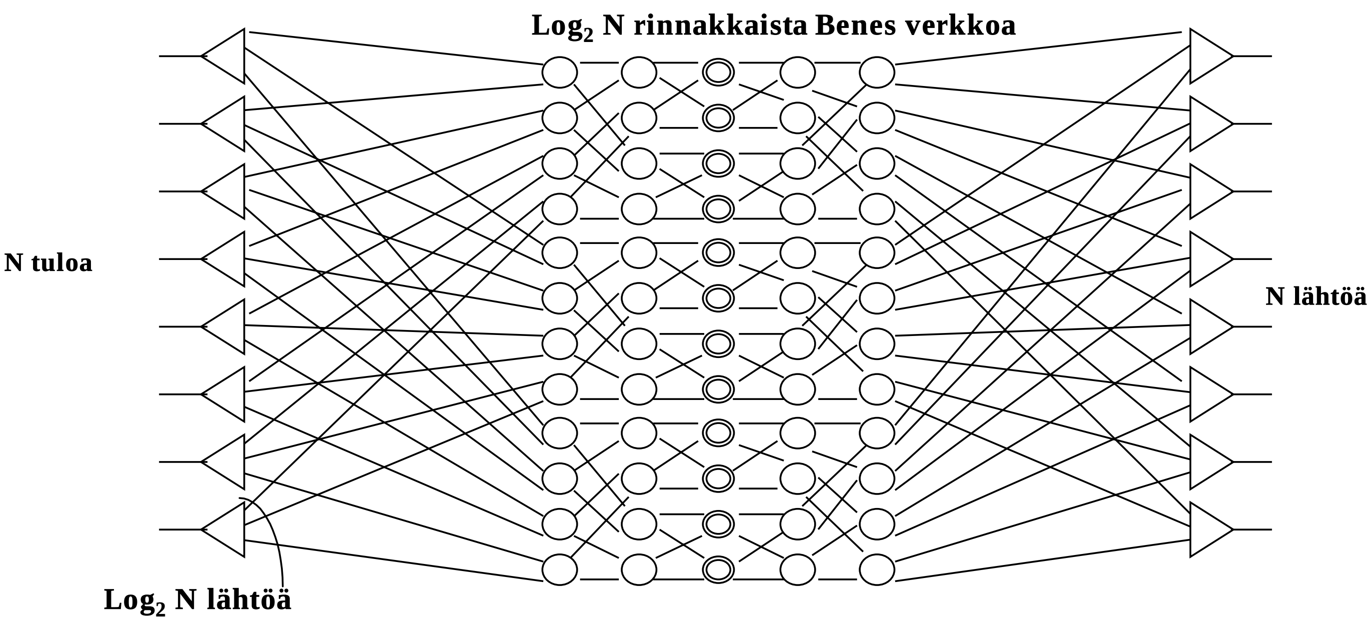
Cantor -verkko on tapa muodostaa tiukasti estottomia kenttiä pienemmällä kytkentäpiste määrällä

- ✔ Peruspalikkana on BENES -verkko.



Cantor -verkko

- ✔ Cantor -verkko on tapa muodostaa tiukasti estottomia kenttiä pienemmällä kytkentäpiste määrällä.



Cantor verkon ominaisuuksia

- **Kytkentäpisteiden lkm = $4 \times N\log_2 N \times \log_2 N = 4N(\log_2 N)^2$** jos kanavointilaitteita ei lasketa.

Cantor verkko on tiukasti estoton!

Todistus:

Merkataan rinnakkaisten Benes verkkojen määrää *m* ja Benes portaan numeroa *k* ja A(*k*) - portaassa *k* yhdestä Cantor verkon tulosta ilman uudelleen järjestelyä saavutettavien Benes -kytkinten määrä.

$A(1) = m$.

$A(2) = 2A(1) - 1$.

$A(3) = 2A(2) - 2$.

$A(k) = 2A(k-1) - 2^{k-2} = 2^2A(k-2) - 2\times 2^{k-2} = 2^{k-1}A(1) - (k-1)2^{k-2}$

$A(\log N) = 2^{\log N-1}m - (\log N - 1)2^{\log N-2}$

$$= \frac{1}{2}Nm - \frac{1}{4}(\log N - 1)N$$

Cantor todistus jatkuu

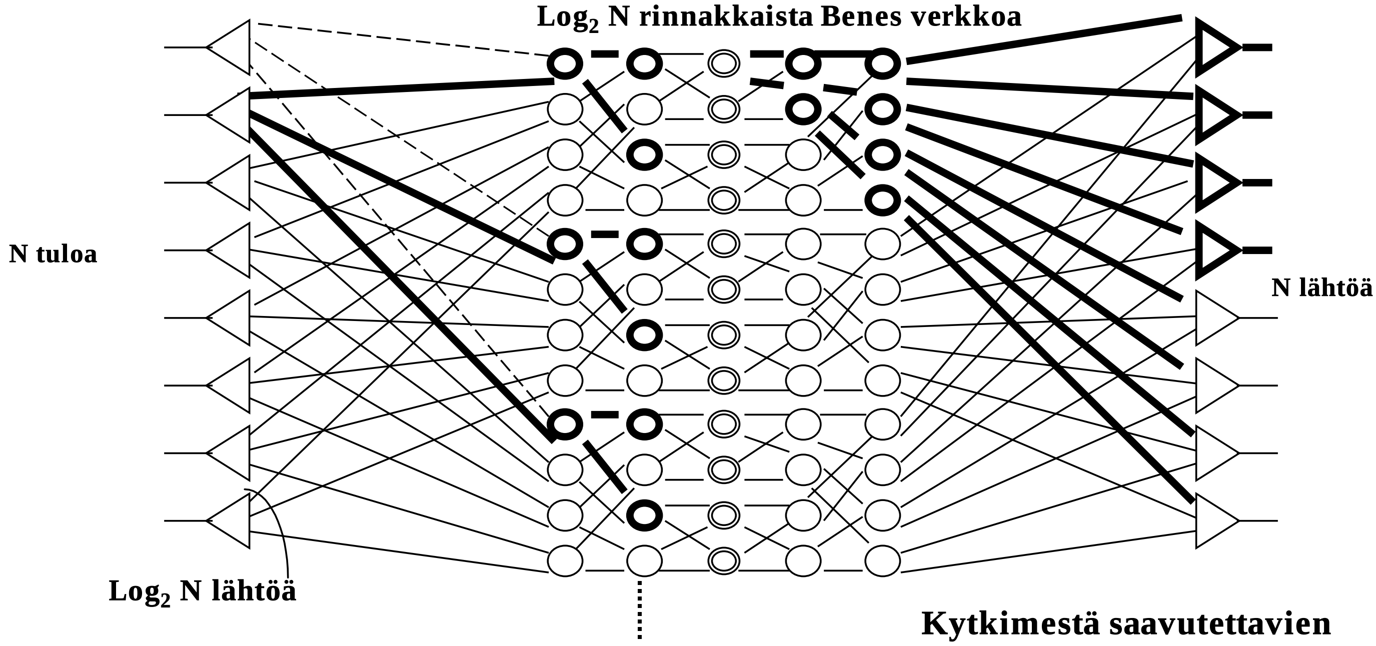
$$2 \times \left(\frac{1}{2}Nm - \frac{1}{4}(\log N - 1)N \right) > \frac{Nm}{2}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{m} > \log N - 1$.

Eli jos rinnakkaisia Benes verkkoja on logN kappaletta, Cantor verkko on tiukasti estoton. □

Ts. *Tiukasti estoton* Cantor verkko muodostuu laittamalla rinnan logN kappaletta *uudelleen järjestettävästi estottomia* Benes verkkoja.

Cantor-verkossa saavutettavien kytkinten määrä



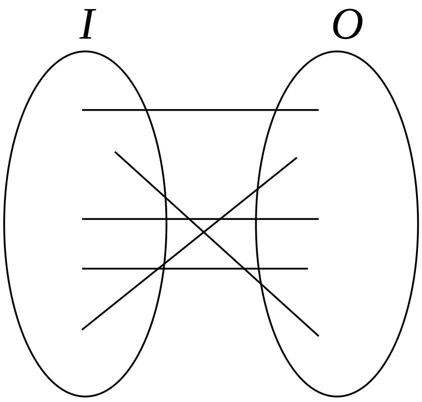
A(2) = 2A(1) – 1 (ilman uudelleen järjestelyä)

Numeerinen esimerkki Cantor verkosta

$N = 32 \times 2048 = 2^{16} \approx 64\,000$
m = logN = 16
Demultiplekseissa lähtöjä = 16 kappaletta
Multipleksereissa tuloja = 16 kappaletta
Muxeja = 64 000 kappaletta
Demuxeja = 64 000 kappaletta
Benes verkkoja = 16 kappaletta

Benes verkoissa portaita = 2logN - 1 = 2x16-1 = 31 kappaletta
Benes verkoissa kytkimiä = $N\log_2 N = 2^{16} * 32 \approx 2M$. kussakin

Kytkentöjen kokonaismäärä kentässä

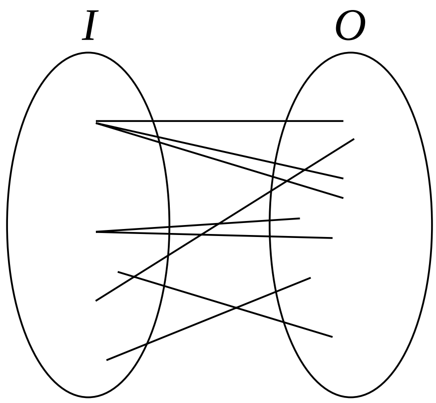


Yksi yhteen

$C = \{(i,o) |\ i \in I, o \in O\}$

$(i,o) \in C$ ja $(i,o') \in C \Rightarrow o = o'$

$(i,o) \in C$ ja $(i',o) \in C \Rightarrow i = i'$



Yksi moneen

$C = \{(i,n_i) |\ i \in I, n_i \subset O\}$

C - Kytkentöjen kuvaus

Kytkentäkentän kompleksisuus

- **Kytkentäkentän kompleksisuus on likimain sama kuin kytkentäpisteiden lukumäärä.**
- **G on kytkentäkentän erilaisten, sallittujen kytkentöjen C{i,o} kuvaus.**
- **ζ(G) on $\log_2$(G) eli logaritmi erilaisten, sallittujen kytkentöjen määrästä. (~ kytkentäpisteiden lukumäärä)**
- **ζ(G) käytetään kytkentäkentän kompleksisuuden aproksimoinnissa, sillä NxN -ristikytkentämatriisi sisältää suurimman määrän kytkentäpisteitä vastaavan kokoisista kytkentäkentistä.**
  - **Mikäli ristikytkentämatriisissa on R-kytkentäpistettä, on siinä maksimissaan 2^R erillistä tilaa (jokaisen kytkentäpisteen auki/kiinni -tila), minkä takia ζ <= R (osa ratkaisuista ei ole sallittuja).**

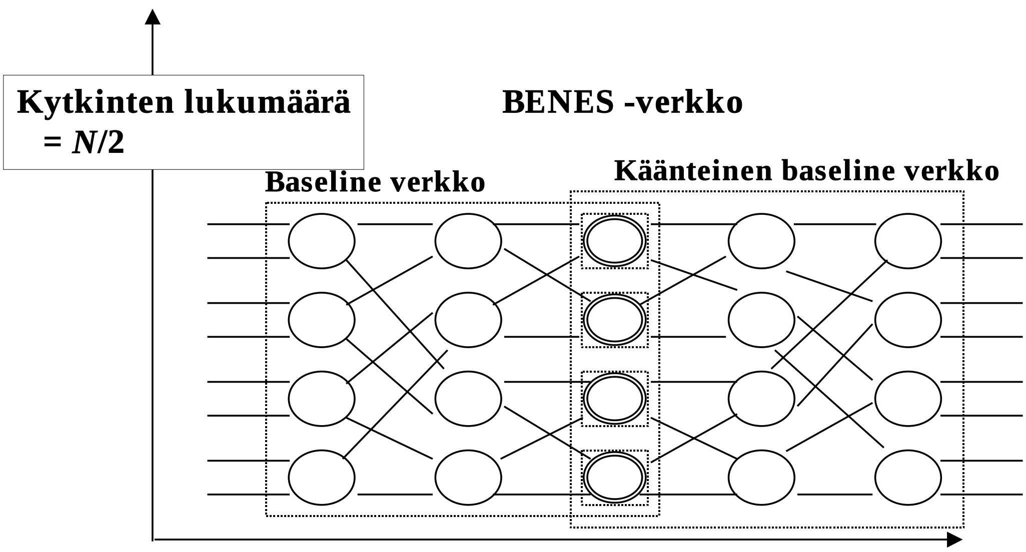
Kompleksisuuden alaraja

- **Oletetaan että kytkentäkenttä on NxN ja sen rakenne on täysiulotteinen.**
- **C = N!**
- **$\zeta = \log_2 (N!) \sim N\log_2(N) - 1{,}44N + \frac{1}{2}\log_2(N)$**
- **Benes -verkkolle on**

$$\zeta \sim (N/2)(2\log_2 N - 1) = N\log_2(N) - \tfrac{1}{2}N$$

eli likimain minimimäärä kytkimiä.

Benes -verkon kasvu



Porrasten lukumäärä = $2 \log_2 N - 1$

Kytkentäpisteiden lukumäärä on porrasten lukumäärä $\times$ kytkinten lkm portaassa =

$$4 \times N/2 \times (2 \log_2 N - 1) \approx 4N \log_2 N$$